

# LSTAR 框架下一类针对单位根原假设的 F 检验

于寄语<sup>1,2</sup> 向镜洁<sup>3</sup>

(1.湖北经济学院 金融学院, 武汉 湖北 430205; 2.湖北金融发展与金融安全研究中心, 武汉 湖北 430205; 3.华中科技大学 经济学院, 武汉 湖北 430074 )

**摘要:** 在 LSTAR 框架下构建了检验单位根原假设的 F 类型统计量, 并推导了其极限分布。相较于之前学者的研究, 对 LSTAR 模型线性系数和位置参数的约束得以放松, 因此更具有普适性; 有限样本下的仿真模拟表明, 相比较 ADF 统计量以及刘雪燕 (2008) 提出的 t 统计量, F 统计量在 LSTAR 框架下具有更大的检验势。随后对人民币实际汇率的 PPP 检验进一步印证了 F 检验在相关应用研究中的适用性和优越性。

**关键词:** 单位根; 非线性; LSTAR 模型; F 类型统计量

中图分类号: O213 文献标示码: A

**Abstract:** F-type statistics are constructed to test the null hypothesis of a unit root in LSTAR framework; the corresponding limiting distributions are derived then. Compared with previous literature, we relaxes constrains on coefficient parameters and location parameters in LSTAR model, which is more applicable and flexible in realistic scenario. The Monte Carlo simulation in finite samples show that F-type test has better power than ADF and t test by Liu Xueyan (2008) on the whole. Finally, an empirical analysis on detecting the applicability of PPP theory for RMB real exchange rate are made, which further underlines the usefulness and superiority of the F-type testing in practice.

**Key words:** Unit root; Nonlinearities; LSTAR Model; F-type statistic

## A Class of F Testing against the Null Hypothesis of Unit Root Testing in LSTAR Framework

Yu Jiyu<sup>1,2</sup> Xiang Jingjie<sup>3</sup>

( 1. School of Finance, Hubei University of Economics, Wuhan 430205;

2. Research Center of Hubei Financial Development and Financial Security, Wuhan 430205;

3. School of Economics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074 )

### 一、引言和文献回顾

STAR (Smooth Transition Auto Regressive) 模型  $y_t = \psi y_{t-1} + \theta F(y_{t-1}, y_{t-k}, c_1, \dots, c_k) y_{t-1} + u_t$  可以有效刻画数据的连续性结构变化特征, 在实际经济问题建模中具有广泛应用。对于这类非线性机制转换模型, 很多研究<sup>[1-3]</sup>指出建立在线性框架下的传统单位根检验 (如 ADF, PP 检验) 容易将其同单位根过程相混淆。有鉴于此, 近来不少文献对平稳 STAR 模型和单位根过程的统计检验问题进行了关注。Kapetanios et al. (2003)<sup>[4]</sup> 从一个简化的 ESTAR (Exponential STAR) 模型  $y_t = y_{t-1} + \theta(1 - \exp(-ry_{t-1}^2))$  出发, 构建了单位根过程对平稳 ESTAR 过程的 t 检验; 在其基础上, Sandberg (2014)<sup>[5]</sup> 考虑到了数据过程可能存在的异常值问题, 提出了

稳健类型的ESTAR单位根检验统计量。相比较ESTAR模型，LSTAR（Logistic STAR）模型  $y_t = \psi y_{t-1} + \theta [1 + \exp(-r(\prod_i (y_{t-j} - c_j)))]^{-1} y_{t-1} + u_t$  所反映的数据过程的非线性调整特征关于位置参数具有非对称性，在很多应用问题中更具有适用性<sup>[6-8]</sup>。以三机制Logistic转移函数为例，Eklund（2003）<sup>[9]</sup>关注了LSTAR框架下数据的平稳性及单位根特征研究，不过其设定的辅助检验式及统计量的构建均较为繁琐；刘雪燕、张晓峒（2008）<sup>[10]</sup>考察了两机制LSTAR模型的单位根检验问题，借鉴Kapetanios, et al（2003）在ESTAR框架下的分析思路，刘雪燕在一个简化的LSTAR模型： $\Delta y_t = \theta y_{t-1} [1 / (1 + \exp(-r y_{t-1})) - 1 / 2] + u_t$  基础上构建了进行单位根检验的  $t$  统计量（后文记为  $t_{LSTAR}$ ）；汪卢俊（2014）<sup>[11]</sup>进一步分析了LSTAR模型中误差项存在条件方差的情形，并结合极大似然估计提出了  $t_{NG}$  统计量。

现有的 STAR 模型单位根检验文献大都限定 STAR 过程  $y_t$  中的转移位置参数  $c_j$  和线性项系数  $\psi$  分别为 0 和 1。而在实际 STAR 模型应用中，位置参数通常是先验未知的，不一定为 0<sup>[12-13]</sup>；对应的线性项系数估计值在很多实证研究中也显著异于 1<sup>[14-15]</sup>，从而前述文献关于位置参数及线性项系数的设定不具有普适性。在放松对上述参数约束后，理论分析表明，STAR 框架内对数据过程的单位根检验不再是一个单参数检验，而是转换为一个多参数的联合检验，需要构造 F 统计量进行分析。鉴于此，以 LSTAR 模型为例，本文细化探讨单位根过程对平稳 LSTAR 过程的 F 检验，以期望推动非线性单位根检验问题的进一步发展。后文的数学符号在此事先给与说明： $\|\cdot\|$  为向量范数， $\rightrightarrows$  代表弱收敛， $\rightarrow$  表示一致收敛， $W$  为定义在  $[0,1]$  上的标准布朗运动， $[x]$  表示对  $x$  取整， $o(\cdot)$  表示高阶无穷小符号， $O(\cdot)$  和  $O_p(\cdot)$  分别表示一般测度和概率测度下的同阶符号， $t=1$  至  $t=T$  上的求和及区间  $[0,1]$  上的积分符号简记为  $\sum$  和  $\int$ 。

## 二、LSTAR框架下的F检验

### （一）LSTAR框架下数据过程的平稳性设定

本文考察的 LSTAR 过程  $z_t$  如下，

$$z_t = m + y_t, \quad y_t = \psi y_{t-1} + \theta y_{t-1} [1 + \exp(-r(y_{t-1} - c_0))]^{-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

$m \in R$  为常数项。特别地，当  $m = 0$  时， $z_t$  转化为一个近似 0 均值 LSTAR(1)过程  $y_t$ 。 $\psi$  和  $\theta$  对应其线性项和非线性项部分的系数， $r > 0$  为非线性速度调节参数， $c_0$  为位置参数， $\varepsilon_t$  为平稳误差项。

在非线性框架下，传统协方差平稳概念不再适合界定数据的平稳性，相关文献通常采用 Tweedie（1975）<sup>[16]</sup>提出的几何便利性和渐近平稳的概念定义数据的平稳性。即，对于序列  $z_t$ ，如果存在常数  $\delta < 1$ ， $B < \infty$ ， $L < \infty$  以及一个有界集合  $C$ ，使得下式（2-3）成立，则称  $z_t$  为平稳序列。

$$E[\|z_t\| | z_{t-1} = z] \leq B, \quad \forall z \in C \quad (2)$$

$$E[\|z_t\| | z_{t-1} = z] < \delta \|z_t\| + L, \quad \forall z \notin C \quad (3)$$

在这个定义下，不难推得（1）式对应的 LSTAR 过程的平稳性条件为

$$|\psi| < 1 \cap |\psi + \theta| < 1 \quad (4)$$

事实上，基于条件（4）我们可以确定某个有限集  $C = [-K^*, K^*]$ ， $K^* > 0$ ，使得当  $y_{t-1} > K^*$  时， $[1 + \exp(-r(y_{t-1} - c_0))]^{-1}$ （简记  $F_t(y_{t-1})$ ）和1无限接近，当  $y_{t-1} < -K^*$  时， $F_t(y_{t-1})$  又和0无限接近。从而  $y \notin C$  时，利用极限的定义可推知  $|\psi + \theta F_t(y_{t-1})| < 1$ ，结合（1）式进而有  $\|z_t\| < \|z\| + \|\varepsilon_t\|$ ，式（3）得以满足；在  $y \in C$  时，由于  $\|y_t\| \leq \|\psi + \theta F_t(y_{t-1})\| K^* + \|\varepsilon_t\|$ ，可推得（2）式成立。

另一方面，当条件（4）不满足时，不难发现数据过程会随着时间的增加很快呈现单位根或者爆炸特征。在经济问题应用中，爆炸情形很少出现，本文予以事先排除<sup>①</sup>。从而式（1）所示的LSTAR模型随着相关参数的变动呈现出非线性平稳或者单位根特征。

## （二）LSTAR框架下F统计量的构建及渐进性质分析

单位根原假设下，模型（1）中的参数  $r$ ， $c_0$ ， $\theta$  不具有可识别性，为消除该类参数的影响，考虑对  $[1 + \exp(-r(y_{t-1} - c_0))]^{-1}$  在  $c_0$  处进行一阶泰勒展开。展开后的LSTAR模型（1）为如下关于参数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的辅助线性回归式，

$$\Delta z_t = a + bz_{t-1}^2 + cz_{t-1} + u_t \quad (5)$$

其中， $a = \theta r m^2 / 4 - (1 + \psi - r c_0 / 4 + \theta / 2) m$ ， $b = \theta r / 4$ ， $c = \psi - r c_0 / 4 + (\theta - m \theta r) / 2$ ， $u_t = R_t + \varepsilon_t$ ， $R_t$  为泰勒余项。当  $z_t$  为单位根过程时，其滞后项及滞后平方项的系数均为0，从而LSTAR框架下的单位根检验对应于（5）式中联合检验  $H_0: b = c = 0$ 。 $H_0$  不成立，则意味着  $z_t$  为非线性的平稳过程。基于这一思路，我们构建（6）式所示的F统计量进行单位根原假设对平稳LSTAR过程备择假设的统计检验。

$$F_{\hat{\beta}} = (\hat{b}, \hat{c}) V_{\hat{\beta}}^{-1} (\hat{b}, \hat{c})', \quad V_{\hat{\beta}} = (\sum x_t x_t')^{-1} \sum \hat{\varepsilon}_t^2 / T \quad (6)$$

上式中  $x_t = (z_{t-1}^2, z_{t-1})'$ ， $\hat{\varepsilon}_t$  对应（5）式的回归残差。进行统计量  $F_{\hat{\beta}}$  的渐进理论推导之前，给出如下假设和引理。

假设1：设定  $u_t = C(L)v_t$ ， $v_t$  为同方差鞅差序列且四阶矩有限，即  $\sum E(v_t^4 | v_{t-1}, v_{t-2}, \dots) < K$ ；滞后算子  $C(L)$  满足  $C(1) \neq 0$ ， $\sum |c_j| < \infty$ 。

引理1：考虑单位根过程  $z_t = z_{t-1} + u_t$ ，误差项  $u_t$  如假设1所述，其对应的短期和长期方差分别为  $\sigma_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum u_t^2 / T$  和  $\bar{\sigma}_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E(\sum u_t)^2 / T$ 。则对于  $m \leq 4$ ，有

$$T^{-(m+2)/2} \sum z_{t-1}^m \Rightarrow \bar{\sigma}_u^m \int W(r)^m dr \quad (7)$$

$$T^{-(m+1)/2} \sum z_{t-1}^m u_t \Rightarrow \bar{\sigma}_u^{m+1} \int W(r)^m dW + m \int W(r)^{m-1} dr \frac{\bar{\sigma}_u^{(m-1)} (\bar{\sigma}_u^2 - \sigma_u^2)}{2} \quad (8)$$

引理1的推导直接参见泛函中心极限定理及 Sandberg (2009)<sup>[17]</sup> 的定理1，这里略证。

定理1：在假设1下，对于原假设下的单位根过程  $z_t = z_{t-1} + u_t$ ，有下式（9）成立

$$F_{\hat{\beta}} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{(1-\lambda)/2} \right)' J_3' V_3^{-1} J_3 \left( \frac{1}{(1-\lambda)/2} \right) \quad (9)$$

<sup>①</sup>对于爆炸情形，通过事前的 ADF 右侧检验很容易将其检测出来。

$$\text{其中 } \lambda = \frac{\sigma_u^2}{\bar{\sigma}_u^2}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} \int (W(r)^2 - f_2)^2 dr & \int (W(r)^2 - f_2)(W(r) - f_1) dr \\ \int (W(r)^2 - f_2)(W(r) - f_1) dr & \int (W(r) - f_1)^2 dr \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \int W(r) dr, \quad f_2 = \int W(r)^2 dr, \quad J_3 = \begin{pmatrix} \int W(r)^2 dW - f_2 W(1) & 2 \int W(r) dr \\ \int W(r) dW - f_1 W(1) & 1 \end{pmatrix}.$$

证明：单位根原假设下，回归检验式 (5) 和下式 (10) 中  $b, c$  的联合统计性质等价，其中  $\bar{z}_{t-1}, \bar{z}_{t-1}^2$  分别为  $z_{t-1}$  和  $z_{t-1}^2$  的均值。

$$u_t \sim b(z_{t-1}^2 - \bar{z}_{t-1}^2) + c(z_{t-1} - \bar{z}_{t-1}) + e_t \quad (10)$$

记  $z_{t-1} = z_{t-1} - \bar{z}_{t-1}$ ,  $z_{t-1}^2 = z_{t-1}^2 - \bar{z}_{t-1}^2$ ,  $x_t = (z_{t-1}^2, z_{t-1})^T$ 。利用引理 1，有

$$\begin{aligned} (\sum x_t x_t^T)^{-1} &= \begin{pmatrix} \sum (z_{t-1}^2)^2 & \sum z_{t-1}^2 z_{t-1} \\ \sum z_{t-1}^2 z_{t-1} & \sum z_{t-1}^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &\Rightarrow \left( \begin{bmatrix} T^{5/2} \bar{\sigma}_u^3 & \\ & T^2 \bar{\sigma}_u^2 \end{bmatrix} V_3 \begin{bmatrix} T^{1/2} \bar{\sigma}_u & \\ & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \end{aligned}$$

记 OLS 估计值  $\hat{\beta} = c(\hat{b}, \hat{c})$ ,  $\sigma_{u,1} = (\bar{\sigma}_u^2 - \sigma_u^2) / 2$ , 易推知

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T^{3/2} \\ T \end{pmatrix} \hat{\beta} &= \begin{pmatrix} T^{3/2} & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum (z_{t-1}^2)^2 & \sum z_{t-1}^2 z_{t-1} \\ \sum z_{t-1}^2 z_{t-1} & \sum z_{t-1}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum z_{t-1}^2 u_t \\ \sum z_{t-1} u_t \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \left( \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_u^3 & \\ & \bar{\sigma}_u^2 \end{bmatrix} V_3 \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_u & \\ & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} J_3 \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_u^3 \\ \sigma_{u,1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

容易证明(10)式中残差方差项  $\sum \hat{\varepsilon}_t^2 / T$  一致收敛到  $\sigma_u^2$ ，从而

$$\begin{aligned} V_{(\hat{b}, \hat{c})} &= (\sum x_t x_t^T)^{-1} \frac{\sum \hat{\varepsilon}_t^2}{T} \\ &\Rightarrow \sigma_u^2 \left( \begin{bmatrix} T^{5/2} \bar{\sigma}_u^3 & \\ & T^2 \bar{\sigma}_u^2 \end{bmatrix} V_3 \begin{bmatrix} T^{1/2} \bar{\sigma}_u & \\ & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \end{aligned}$$

最终可推得，

$$\begin{aligned} F_{\hat{\beta}} &= \begin{pmatrix} T^2 \hat{b} \\ T \hat{c} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} T^{-2} & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} V_{(\hat{b}, \hat{c})}^{-1} \begin{pmatrix} T^{-2} & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^2 \hat{b} \\ T \hat{c} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ (1-\lambda)/2 \end{pmatrix}' J_3' V_3^{-1} J_3 \begin{pmatrix} 1 \\ (1-\lambda)/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定理1意味着  $F_{\hat{\beta}}$  的渐进分布受到冗余参数  $\lambda$  的影响。鉴于此，我们需要对其进行修订，以保证检验统计量的中枢性。修订后的统计量  $F^{ss}$  在 (11) 式给出，其中  $\bar{s}_e^2$  为基于Newey-West方法得到的长期方差  $\sigma_u^2$  的估计值，表达式为  $\bar{s}_e^2 = \hat{r}_0 + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor 4(T/100)^{29} \rfloor} k_m(j) \hat{r}_j$ ， $k_m$  为Bartlett核函数， $\hat{r}_j = \sum \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-j} / T$ ， $\hat{\varepsilon}_t$  为 (5) 式的残差项；另外  $s_e^2 = \sum \hat{\varepsilon}_t^2 / T$ ， $s_{e,1} = (\bar{\sigma}_e^2 - \sigma_e^2) / 2$

分别为  $\sigma_u^2$  和  $\sigma_{u,1}$  的估计量。不难推知，统计量  $F^{ss} \Rightarrow [1 \ 0]J_3'V_3^{-1}J_3[1 \ 0]'$ ，具有中枢性。

$$F^{ss} = \lambda F - \left( \frac{2}{(1-\lambda)} \right)' \hat{\Omega} \left( \frac{0}{(1-\lambda)} \right), \quad \hat{\Omega} = H' \begin{pmatrix} T^{3/2} \bar{s}_e^2 & \\ & T \bar{s}_e \end{pmatrix} L^{-1} \begin{pmatrix} T^{3/2} \bar{s}_e^2 & \\ & T \bar{s}_e \end{pmatrix} H \quad (11)$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\sum z_{t-1}^2 \Delta z_t - 2s_{e,1} \sum z_t}{\bar{s}_e^3 T^{3/2}} & \frac{2 \sum z_t}{T^{3/2} \bar{s}_e} \\ \frac{\sum z_{t-1} \Delta z_t - T s_{e,1}}{\bar{s}_e^2 T} & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \sum (z_{t-1}^2)^2 & \sum z_{t-1}^2 z_{t-1} \\ \sum z_{t-1}^2 z_{t-1} & \sum z_{t-1}^2 \end{pmatrix}$$

上述修订统计量  $F^{ss}$  建立在半参数方法基础之上。很多文献<sup>[18]</sup>指出在单位根检验统计量的构建中，这种半参数调整方案（如PP检验）在强自相关新息误差项下表现出较差的有限样本性质，通过模拟我们发现  $F^{ss}$  也会面临这一问题。鉴于此，这里提供了另外一种思路解决统计量  $F_\beta$  非中枢的问题。如下，通过加入差分滞后项  $\Delta z_{t-k}$  对检验式（5）进行扩充，得到增广检验式（12），其中滞后阶数  $p$  基于BIC准则： $\min_p (\ln(\hat{\sigma}_{e,p}^2) + 3 \ln(T)/T)$  确定， $\hat{\sigma}_{e,p}^2$  为相应的回归残差方差。之后在检验式（12）基础上，我们按照（6）式重新构建F统计量，并记作  $F^0$ 。

$$\Delta z_t = \hat{a} + \hat{b} z_{t-1}^2 + \hat{c} z_{t-1} + \hat{p}_k \sum_1^p \Delta z_{t-k} + \tilde{e}_t \quad (12)$$

定理2：定理1条件下，有  $F^0 \Rightarrow [1 \ 0]J_3'V_3^{-1}J_3[1 \ 0]'$ 。

证明：假设 1 意味着  $u_j = C(L)v_j$  为可逆的 MA 过程，可由 AR( $p$ )过程逼近。从而单位根原假设下  $z_t$  可表示为： $z_t = \sum_1^t u_j$ ， $u_j = \rho_1 u_{j-1} + \rho_2 u_{j-2} + \dots + \rho_p u_{j-p} + v_j$ 。记  $M$  为空间  $c(1, u_{t-1}, \dots, u_{t-p})$  上的残差投影算子，则  $M \Delta z_t = v_t$ 。根据 FWL 引理<sup>[19]</sup>，（12）式与下（13）式均等价于： $v_t = \hat{b} M z_{t-1}^2 + \hat{c} M z_{t-1} + \hat{e}_t$ ，且参数  $(\hat{b}, \hat{c})$  的联合统计性质保持不变。

$$v_t \sim \hat{a} + \hat{b} M z_{t-1}^2 + \hat{c} M z_{t-1} + \hat{p}_k \sum_1^p u_{t-k} + \hat{e}_t \quad (13)$$

从而我们可以基于式（13）考察  $F^0$  的统计性质。

另一方面，利用 B-N 分解定理有

$$z_t = \sum_1^t C(L)v_j = C(1) \sum_1^t v_j + C^*(L) \sum_1^t \Delta v_j$$

其中  $C^*(j) = \sum_{i=j+1}^\infty -C(i)$ 。注意到  $C(1)\tilde{z}_t = O(\sqrt{T})$ ， $C^*(L)\sum_1^t \Delta v_j = O(1)$ 。记  $\tilde{z}_t = \sum_1^t v_j$ ，易知  $C(1)\tilde{z}_t$  为  $z_t$  的主导成分， $C(1)^2 \tilde{z}_t^2$  为  $z_t^2$  的主导成分，从而在式（6）定义下，式（13）中  $z_{t-1}^2, z_{t-1}$  与下式（14）中  $\tilde{z}_{t-1}^2, \tilde{z}_{t-1}$  前系数对应的 F 统计量具有相同的渐进分布。

$$v_t \sim \hat{a} + \hat{b} M \tilde{z}_{t-1}^2 + \hat{c} M \tilde{z}_{t-1} + \hat{p}_k \sum_1^p u_{t-k} + \hat{e}_{2t} \quad (14)$$

再次利用 FWL 引理，（14）式中的参数统计性质和下（15）式具有等价性

$$v_t \sim \hat{a} + \hat{b} \tilde{z}_{t-1}^2 + \hat{c} \tilde{z}_{t-1} + \hat{p}_k \sum_1^p u_{t-k} + \hat{e}_{2t} \quad (15)$$

随后，类似于定理 1 的证明，可推知定理 2 成立。

推论 2 和定理 2 表明统计量  $F^0$  和  $F^{ss}$  具有相同的渐进分布。下表 1 给出了相应的 90%

和 95%分位点, 分别作为 5%及 10%显著水平下的本文 F 检验的临界值。模拟中的仿真次数为 10000 次, 极限情形下的临界值基于 T=1000 得到。

表1 统计量  $F^0$ 、 $F^{ss}$  对应临界值

分位点	T=50	T=100	T=200	T=300	T= $\infty$
90%	7.947	7.726	7.674	7.738	7.689
95%	9.799	9.543	9.432	9.423	9.588

### 三、Size及Power表现: 有限样本下的蒙特卡罗模拟

考虑到非参数调整统计量  $F^{ss}$  的缺陷, 本部分基于  $F^0$  考察 F 检验在有限样本下的表现。作为对比, 传统 ADF 单位根检验以及刘雪燕 (2008) 提出的  $t$  检验的表现也一并列出, 分别用 ADF、T\_Lstar 进行标记。

#### (一) size 分析

Size 分析考察的是统计量拒绝单位根原假设的概率表现, 具体的数据生成过程为:

$$z_t = z_{t-1} + u_t, \quad u_t = \rho u_{t-1} + v_t \quad (16)$$

$v_t$  由独立的正态分布  $N(0,1)$  生成, 设定参数  $\rho \in (0, 0.4, -0.4)$ , 分别反映独立、正相关以及负相关情形下的新息误差项  $u_t$ , 样本容量设置 T=100 和 T=300 两种情形。  $F^0$  以及 ADF 统计量、T\_Lstar 统计量的 size 分析结果在表 2 列出。可以看到无论误差项是否存在相关性, 有限样本下  $F^0$ 、ADF、T\_Lstar 的 size 取值均接近 0.05 的名义水平, 基本不存在扭曲现象。这意味着三者均能较好地识别原假设下数据过程的单位根特征。

表 2 单位根过程原假设下有限样本下各统计量表现 (模拟次数 2000)

样本量	$\rho$	T_Lstar	ADF	$F^0$
T=100	0	0.049	0.047	0.047
	0.4	0.052	0.041	0.065
	-0.4	0.047	0.045	0.068
T=300	0	0.055	0.047	0.047
	0.4	0.056	0.045	0.053
	-0.4	0.054	0.043	0.057

#### (二) power 分析

$$z_t = y_t + m, \quad y_t = \psi y_{t-1} + \theta y_{t-1} ((1 + \exp(-r(y_{t-1} - c)))^{-1} + u_t, \quad u_t = \rho u_{t-1} + v_t \quad (17)$$

Power 分析下的数据生成过程如 (17) 式。同样设定  $\rho \in (0, 0.4, -0.4)$  反映误差项  $u_t$  的自相关性强弱。非线性速度调节参数  $r \in (0.05, 0.5, 5)$ ; 位置参数  $c_0$  基于均匀分布  $U(-5, 5)$  随机提取; 由于  $m$  的取值对最终考察统计量的渐进分布无影响, 设定  $m = 0$ ; 线性和非线性项系数  $(\psi, \theta)$  设置 7 种情形, 分别为 (0.85, -0.5)、(0.85, -0.1)、(0.95, -0.5)、(0.95, -0.1)、(0.99, -0.5)、(0.99, -0.1)、(1.02, -0.04), 其中前 6 种设定满足 LSTAR 模型平稳性条件 (4), 最后一组参数是按照刘雪燕、张晓峒 (2008) 的分析进行设定, 以同其检验统计量 T\_Lstar 进行有效对比。需要指出刘雪燕、张晓峒所考察的 LSTAR 模型是本文模型 (1) 在  $(\psi - \theta / 2) = 1$  及

$c = 0$  下的特例，即  $z_t = y_t + m$ ,  $\Delta y_t = \theta y_{t-1} [((1 + \exp(-r y_{t-1}))^{-1}) - 1/2] + u_t$ ，不过注意到  $(\psi - \theta/2) = 1$  的限定条件同 (4) 式对应的平稳条件相矛盾，从而其设定的LSTAR过程本身就不具有平稳特征，在此基础上构建的检验统计量有待商榷。

Power分析的结果在表3列出。可以看到， $F^0$ 在整体上优于ADF检验及 $T\_lstar$ 检验的表现。细化来看，以独立误差项  $\rho = 0$  为例；在  $|\psi + \theta|$  显著小于1，同时  $r$  相对较小时，ADF同本文 $F^0$ 统计量的检验效能差别不大，仍具有较高的检验势，如  $r = 0.5$ ， $(\psi, \theta) = (0.85, -0.5)$ ，样本 $T=100$ 下ADF和 $F^0$ 统计量的power值分别对应0.95和0.98。注意到该情形下， $|\psi + \theta|$  显著小于1意味着数据的平稳度较强，数据走势在局部区域内具有较弱的持续性； $r$  取值较小则反映了LSTAR过程中的非线性调节力度不大，从而最终数据所呈现出的非线性特征并不明显，此时ADF检验仍可以较好地对LSTAR模型的平稳性进行考察。不过随着  $|\psi + \theta|$  和  $r$  加大，数据呈现的非线性特征不断加强， $F^0$  相对于ADF的检验优势不断得以体现。表3可以看到，保持上述样本 $T=100$ 和  $r = 0.5$  的设定不变， $(\psi, \theta)$  变动至  $(0.99, -0.5)$  时，两者的Power值分别对应于0.60和0.69；而保持  $(\psi, \theta) = (0.85, -0.5)$  不变， $r$  增加至5时，ADF和 $F^0$ 的power值则分别变动至0.87和0.94。对于统计量 $T\_Lstar$ 而言，表3显示大部分情形下其power值很低，甚至不足0.1；仅在  $(\psi, \theta)$  设定为  $(1.02, -0.04)$  时，拒绝原假设的概率相对较高。但如前所分析，该组参数下LSTAR过程的平稳性条件并不满足， $\psi > 1$  会导致数据过程随着时间增加很快呈现爆炸特征，从而统计量 $T\_Lstar$ 并不能有效区分数据的单位根和非线性平稳特征。

在误差项非独立情形下 ( $\rho = \pm 0.4$ )，各统计量的相对表现类似。 $T\_Lstar$ 在前六组  $(\psi, \theta)$  参数对应的平稳LSTAR过程下的表现仍然非常糟糕，如  $T = 100$ ， $r = 0.5$ ， $\rho = 0.4$  时，前六组  $(\psi, \theta)$  设定下 $T\_Lstar$ 的power值分别对应于 (0.019, 0.006, 0.019, 0.009, 0.0326, 0.029)；相应地，ADF的power值分别为 (0.872, 0.658, 0.590, 0.240, 0.431, 0.127)， $F^0$ 的power值为 (0.926, 0.697, 0.683, 0.277, 0.516, 0.150)；本文F检验的检验势明显高于前两者。

表3 备择假设下各统计量Power表现 (模拟次数 2000)

$r$	$(\psi, \theta)$	误差项: $\rho = 0$			误差项: $\rho = 0.4$			误差项: $\rho = -0.4$		
		$T\_Lstar$	ADF	$F^0$	$T\_Lstar$	ADF	$F^0$	$T\_Lstar$	ADF	$F^0$
T=100										
0.05	(0.85,-0.5)	0.013	0.991	1.000	0.011	0.978	0.985	0.048	1.000	1.000
	(0.85,-0.1)	0.004	0.798	0.855	0.005	0.689	0.722	0.011	0.842	0.930
	(0.95,-0.5)	0.007	0.971	0.987	0.008	0.908	0.921	0.030	0.991	0.999
	(0.95,-0.1)	0.003	0.301	0.376	0.005	0.273	0.316	0.006	0.311	0.452
	(0.99,-0.5)	0.006	0.931	0.959	0.008	0.837	0.862	0.020	0.965	0.992
	(0.99,-0.1)	0.005	0.145	0.197	0.006	0.140	0.167	0.005	0.151	0.259
	(1.02,-0.04)	0.105	0.056	0.081	0.146	0.057	0.086	0.086	0.051	0.095
0.5	(0.85,-0.5)	0.039	0.952	0.976	0.019	0.872	0.926	0.096	0.974	0.992
	(0.85,-0.1)	0.006	0.777	0.838	0.006	0.658	0.697	0.014	0.823	0.917
	(0.95,-0.5)	0.031	0.740	0.812	0.019	0.590	0.683	0.070	0.786	0.874
	(0.95,-0.1)	0.007	0.291	0.356	0.009	0.240	0.277	0.008	0.303	0.441
	(0.99,-0.5)	0.036	0.603	0.686	0.036	0.431	0.516	0.066	0.671	0.761
	(0.99,-0.1)	0.020	0.150	0.203	0.029	0.127	0.150	0.019	0.152	0.252

	(1.02,-0.04)	0.303	0.052	0.108	0.324	0.053	0.113	0.276	0.051	0.113
5	(0.85,-0.5)	0.051	0.874	0.936	0.026	0.780	0.885	0.120	0.896	0.956
	(0.85,-0.1)	0.007	0.746	0.816	0.007	0.643	0.687	0.017	0.791	0.904
	(0.95,-0.5)	0.039	0.536	0.665	0.025	0.431	0.559	0.080	0.582	0.715
	(0.95,-0.1)	0.008	0.280	0.345	0.010	0.230	0.269	0.011	0.304	0.427
	(0.99,-0.5)	0.058	0.404	0.494	0.051	0.304	0.387	0.086	0.451	0.545
	(0.99,-0.1)	0.026	0.155	0.201	0.034	0.117	0.147	0.027	0.170	0.259
	(1.02,-0.04)	0.328	0.048	0.109	0.338	0.048	0.117	0.314	0.052	0.121
<hr/>										
T=300										
<hr/>										
r=0.05	(0.85,-0.5)	0.021	1.000	1.000	0.012	1.000	1.000	0.053	1.000	1.000
	(0.85,-0.1)	0.002	1.000	1.000	0.004	1.000	1.000	0.012	1.000	1.000
	(0.95,-0.5)	0.012	1.000	1.000	0.006	1.000	1.000	0.032	1.000	1.000
	(0.95,-0.1)	0.001	0.986	0.988	0.002	0.973	0.968	0.001	0.992	0.994
	(0.99,-0.5)	0.010	1.000	1.000	0.005	1.000	1.000	0.024	1.000	1.000
	(0.99,-0.1)	0.000	0.727	0.723	0.002	0.671	0.658	0.000	0.745	0.780
	(1.02,-0.04)	0.376	0.042	0.349	0.447	0.043	0.468	0.308	0.042	0.279
0.5	(0.85,-0.5)	0.078	1.000	1.000	0.022	1.000	1.000	0.167	1.000	1.000
	(0.85,-0.1)	0.006	1.000	1.000	0.004	1.000	1.000	0.019	1.000	1.000
	(0.95,-0.5)	0.046	0.984	0.997	0.013	0.960	0.991	0.111	0.995	0.998
	(0.95,-0.1)	0.002	0.924	0.942	0.002	0.884	0.910	0.004	0.939	0.960
	(0.99,-0.5)	0.035	0.777	0.847	0.015	0.585	0.694	0.093	0.858	0.902
	(0.99,-0.1)	0.004	0.424	0.466	0.007	0.301	0.346	0.005	0.506	0.559
	(1.02,-0.04)	0.715	0.040	0.751	0.593	0.030	0.786	0.715	0.048	0.721
5	(0.9,-0.5)	0.108	1.000	1.000	0.027	1.000	1.000	0.235	1.000	1.000
	(0.9,-0.1)	0.007	1.000	1.000	0.004	1.000	1.000	0.022	1.000	1.000
	(0.95,-0.5)	0.043	0.953	0.985	0.011	0.911	0.975	0.109	0.956	0.981
	(0.95,-0.1)	0.002	0.897	0.924	0.002	0.865	0.899	0.004	0.895	0.931
	(0.99,-0.5)	0.031	0.505	0.628	0.018	0.397	0.520	0.066	0.557	0.667
	(0.99,-0.1)	0.007	0.325	0.382	0.007	0.251	0.292	0.006	0.392	0.457
	(1.02,-0.04)	0.745	0.039	0.787	0.604	0.026	0.804	0.761	0.049	0.766

本部分模拟表明，当考察数据的非线性特征不太明显时，ADF 检验同本文构造的  $F^0$  统计量均具有较高检验势，两者的检验效能差别不大；不过随着非线性特征的加强，我们  $F^0$  统计量体现出更明显的优势。另外，对于刘雪燕（2008）提出的  $T\_Lstar$  统计量，由于其模型设定的局限性，使得该  $t$  检验对平稳 LSTAR 过程具有较差的检验功效。从而在非线性框架下的应用分析中，更建议采用本文的 F 检验考察数据的平稳性问题。

#### 四、实证应用：对人民币实际汇率的 PPP 检验

PPP（购买力平价）假设实际汇率是围绕长期均衡路径上下波动的平稳过程。因此，通过对实际汇率进行单位根检验可以验证 PPP 理论是否成立。在现实分析中，由于贸易成本、壁垒等因素，实际汇率对于均衡路径的调整往往体现出非线性性。同时如很多文献所指<sup>[20]</sup>，人民币升值期间的波动程度和贬值期间的波动程度存在一定程度的非对称性。鉴于此，我们



应用本文 LSTAR 框架下的  $F$  检验对人民币对美元实际汇率（图 1）的平稳性特征进行考察。具体数据研究区段为 1986 年 1 月至 2016 年 3 月，期间的实际汇率  $z_t$  是在名义汇率  $z_{nt}$  的基础之上利用美国物价指数和中国物价指数之比调整得到，调整方式为  $z_t = z_{nt} CPI_{US} / CPI_{China}$ ，名义汇率及物价指数来源于 OECD 统计数据库和中国统计局。

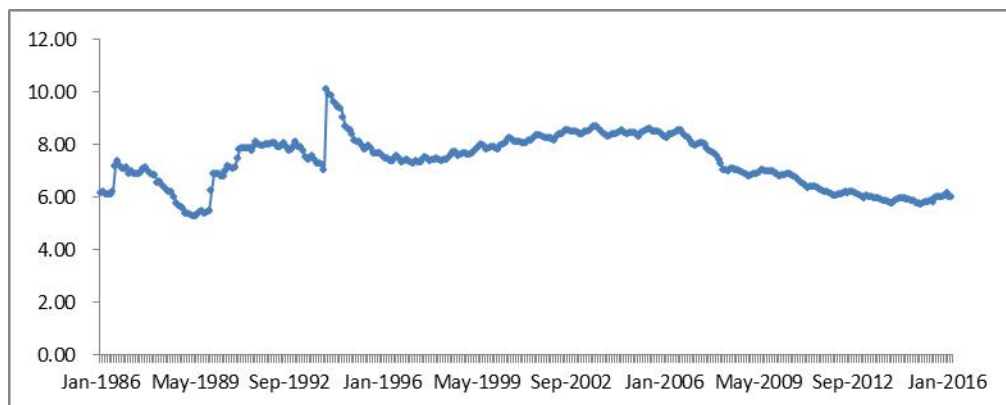


图 1 1986.1-2016.3 人民币对美元实际汇率走势

表 4 给出了统计量  $F^0$  的检验结果。作为对比，ADF 和  $T\_Lstar$  检验的结果也相应列出。可以看到本文的  $F$  检验有效拒绝了单位根原假设，从而为人民币实际汇率的均值回复机制提供了证据，这一结论也与 PPP 理论保持一致。而  $T\_Lstar$  和 ADF 的检验结果均未能拒绝单位根原假设。细化地，表 5 给出了 LSTAR 模型线性化后辅助检验回归式的参数估计结果，BIC 准则建议辅助检验式中加入待考察数据的一阶差分滞后项  $\Delta z_{t-1}$ ，对应的检验式设定为  $\Delta z_t = \hat{a} + \hat{b}z_{t-1}^2 + \hat{c}z_{t-1} + \hat{p}\Delta z_{t-1} + \hat{e}_t$ 。结果显示，非线性项系数估计值  $\hat{b}$  相较于线性项系数  $\hat{c}$  更为显著，中国实际汇率数据走势的非线性调整机制较为明显，这种情形下本文  $F$  统计量的检验势明显优于线性 ADF 检验的表现；另外如前文仿真所指， $T\_Lstar$  检验并不具有有效性，从而我们更倾向于接受  $F$  检验的结论，即人民币实际汇率数据支持 PPP 理论的成立。

表4 各统计量取值（利用BIC准则, 检验式中滞后项阶数确定1）

数据	$F^0$	$T\_Lstar$	ADF
人民币实际汇率（1986.1-2016.3）	8.27**	-1.19	-2.02

\*\*代表在 0.05 显著水平下拒绝单位根原假设

表5  $\Delta z_t \sim \hat{a} + \hat{b}z_{t-1}^2 + \hat{c}z_{t-1} + \hat{p}\Delta z_{t-1} + \hat{e}_t$  下相关参数估计结果

	估计值	标准差	t-值	p-值
截距	-0.80	0.51	-1.57	0.12
$\hat{b}$	-0.02	0.01	-1.91	0.06
$\hat{c}$	0.25	0.14	1.75	0.08
$\hat{p}$	0.08	0.05	1.49	0.13

## 五、结论

本文提出了检验线性单位根原假设对平稳 LSTAR 模型备择假设的  $F$  检验，在理论上丰富了非线性单位根检验的相关研究。误差项相关情形下，传统形式  $F$  统计量的渐进分布含

有冗余参数, 本文通过两种方式对其进行了修订。方式一基于半参数方法得到修正统计量  $F^{ss}$ ; 方式二通过向原始辅助检验式加入合适阶数的差分滞后项进行增广回归, 得到调整统计量  $F^0$ 。理论分析表明  $F^{ss}$ 、 $F^0$  均具有中枢性, 不过如很多文献所指, 半参数调整方案下的单位根检验统计量在误差相关性较强时表现出较差的有限样本性质, 所以在有限样本应用中不建议使用统计量  $F^{ss}$ 。在仿真实验中, 我们基于  $F^0$  同 ADF 检验以及刘雪燕 (2008) 提出的  $t$  检验进行了对比分析, 结果表明在不同参数设定下, 本文提出的  $F$  检验均具有更高的检验势; ADF 检验由于未考虑到数据生成机制中的非线性部分, 表现差于  $F^0$ ;  $T\_Lstar$  统计量则由于模型参数的前提约束及理论分析的缺陷, 并不能有效区分数据的单位根和非线性平稳特征。最后, 本文从 PPP 理论出发, 对人民币实际汇率的平稳性特征进行了考察, 进一步印证了  $F$  检验在非线性的 LSTAR 框架下的优越性。

## 参考文献

- 【1】 Pippenger M K, Goering G E. A Note on the Empirical Power of Unit Root Tests under Threshold Processes[J]. Oxford Bulletin of Economics & Statistics, 1993, 55(4).
- 【2】 Balke N S, Fomby T B. Threshold Cointegration[J]. International Economic Review, 1997, 38.
- 【3】 Taylor A M. Potential Pitfalls for the Purchasing-Power-Parity Puzzle? Sampling and Specification Biases in Mean-Reversion Tests of the Law of One Price[J]. Econometrica, 2001, 69(2).
- 【4】 Kapetanios G, Shin Y, Snell A. Testing for a Unit Root in the Nonlinear STAR Framework[J]. Journal of Econometrics, 2003, 112(2).
- 【5】 Sandberg R. M-estimator based unit root tests in the ESTAR framework[J]. Statistical Papers, 2015, 56.
- 【6】 田锐, 冯长焕, 吕春艳. 基于分形理论的LSTAR模型检验[J]. 统计与信息论坛, 2012, 27(8).
- 【7】 丁东洋, 周丽莉. 基于LSTAR模型的非线性协整检验[J]. 统计与信息论坛, 2012, 27(9).
- 【8】 李正辉, 蒋赞, 李超. Divisia加权货币供应量作为货币政策中介目标有效性研究——基于LSTAR模型的实证分析[J]. 数量经济技术经济研究, 2012(3).
- 【9】 Eklund B. Testing the Unit Root Hypothesis against the Logistic Smooth Transition Autoregressive Model [J]. Working Paper, 2003.
- 【10】 刘雪燕, 张晓峒. 非线性LSTAR模型中的单位根检验[J]. 南开经济研究, 2009(01).
- 【11】 汪卢俊. LSTAR—GARCH模型的单位根检验[J]. 统计研究, 2014, 31(07).
- 【12】 Taylor M P, Peel D A, Sarno L. Nonlinear Mean-Reversion in Real Exchange Rates: Toward a Solution To the Purchasing Power Parity Puzzles[J]. International Economic Review, 2001, 42(4).
- 【13】 Rapach D E, Wohar M E. The Out-of-Sample Forecasting Performance of Nonlinear Models of Real Exchange Rate Behavior[J]. International Journal of Forecasting, 2006, 22(2).
- 【14】 Gregoriou A, Kontonikas A. Modeling the behaviour of inflation deviations from the target[J]. Economic Modelling, 2009, 26(1).
- 【15】 Lin J B, Liang C C, Yeh M L. Examining nonlinear dynamics of exchange rates and forecasting performance based on the exchange rate parity of four Asian economies[J]. Japan & the World Economy, 2011,23(2).
- 【16】 Tweedie R L. Sufficient Conditions for Ergodicity and Recurrence of Markov on a General State Space[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1975, 3(4).
- 【17】 Sandberg R. Convergence to Stochastic Power Integrals for Dependent Heterogeneous Processes [J]. Econometric Theory, 2009,25(3).
- 【18】 Schwert G W. Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation[J]. Journal of Business & Economic Statistics, 1989,7(2).
- 【19】 Lovell M C. Seasonal Adjustment of Economic Time Series and Multiple Regression[J]. Journal of the

American Statistical Association, 1963, 58(304).

【20】张欣, 崔日明. 基于非对称随机波动模型的人民币汇率波动特征研究[J]. 国际金融研究, 2013(1).

## 第一作者简介、基金支持、联系方式

于寄语 (1988.12-), 男, 皖阜阳人,  
湖北经济学院金融学院讲师, 经济学博士  
研究方向: 计量经济理论, 应用统计分析。  
电话: 18171214170,

Email: 787431741@qq.com

通讯地址:

武汉市 江夏区 藏龙岛开发区 杨桥湖大道 8 号 湖北经济学院 新法商科研楼 210 室  
邮编 430205

中图分类号: O213 文献标识码: A

国家自然科学基金项目名称:

中度偏离、泡沫与单位根过程的结构变化理论和应用研究——我国供给侧改革和金融监管的理论和实证依据

基金编号 [71671070]

邮寄样刊、发票和稿费的具体通讯地址:

武汉市 江夏区 藏龙岛开发区 杨桥湖大道 8 号 湖北经济学院 新法商科研楼 210 室  
邮编 430205

电话: 18171214170

发票抬头信息: 湖北经济学院